

به نام خدا

سخن نخست

از ویژگی های بارز بین مدارس معمولی و مدارس استعدادهای درخشان وجود دروس تکمیلی در کنار کتب وزارتی می باشد . مطالعه و تدریس دروس تکمیلی باعث شکوفایی و رشد استعدادهای دانش آموزان تیزهوش و موجبات موفقیت آنها در آزمونهای علمی از جمله المپیادهای علمی در سطح کشور و جهان می گردد .

ریاضیات تکمیلی پایه ی دهم از سال تحصیلی ۹۵ - ۹۴ به همت گروه ریاضی سمپاد کشور ، اساتید گرانقدر آقای بهمن اصلاح پذیر و خانم آرزو حسینی پایه ریزی و مطالبی مناسب از سراسر کشور جمع آوری و در اختیار گروه ریاضی سمپاد استان خراسان رضوی قرار گرفت .

با تلاش گروه ریاضی سمپاد و اداره پرورش استعداد های درخشان و دانش پژوهان جوان استان در شهریور ۱۳۹۵ همایشی سه روزه تشکیل و به بحث و تبادل نظر راجع به مطالب جمع آوری شده پرداخته شد .

در پایان لازم است از همکارانی که ما را در تدوین این جزوه یاری نمودند از جمله آقای علیرضا مهدیزاده و خانم فروغ شکوهی مدرسین مراکز شهیدهاشمی نژاد یک و فرزنانگان یک مشهد تقدیر و تشکر گردد .

عباس معینی راد

سرگروه ریاضی سمپاد خراسان رضوی

گزاره ها

تعریف گزاره

هر گزاره جمله ای است خبری که درست یا نادرست باشد. مثلا $۲ + ۴ = ۵$ گزاره نادرست و $۳ < ۵$ گزاره درست می باشد. اما $۳ + ۷$ گزاره نیست زیرا در اینجا جمله خبری وجود ندارد که درستی یا نادرستی آن مطرح باشد. معمولا گزاره ها را با حروفی مثل p و q و r ... نشان می دهند.

تذکر: در بیان یک گزاره باید کلماتی را که بکار می بریم معانی مشخص و معینی داشته باشند. مثلا اگر بگوییم (۱۰۰۰ عدد بزرگی است) تا زمانی که بزرگ بودن را تعریف نکرده باشیم گزاره نیست. باید دانست که لازم نیست ما قادر به تشخیص درستی یا نادرستی گزاره باشیم بلکه یک گزاره باید به خودی خود دارای ارزش یکتایی باشد. مثلا اگر بگوییم در این لحظه جمعیت کره زمین ۵۸۹۵۳۹۲۷۲۱ نفر می باشد یک گزاره بیان کرده ایم اما درستی یا نادرستی آن را نمی دانیم.

ترکیب گزاره ها

با استفاده از رابط های گزاره ای می توانیم گزاره ها را با هم ترکیب کنیم و گزاره های جدیدی بدست آوریم. این رابط ها عبارتند از :

الف) ترکیب عطفی

اگر دو گزاره با حرف « و » کنار هم قرار گیرند، گزاره ای حاصل می شوند که آن را « ترکیب عطفی » آن دو گزاره می نامند. ترکیب عطفی گزاره های p و q را با علامت $p \wedge q$ نشان می دهند و نماد « \wedge » را « عطف » می نامند. ارزش $p \wedge q$ فقط وقتی درست است که هر دو گزاره تشکیل دهنده ی آن درست باشند. مثلا: « ۴ عدد اول است و ۲۰ بر ۴ بخش پذیر می باشد. » یک ترکیب عطفی است و ارزش آن نادرست می باشد زیرا فقط گزاره دوم این ترکیب عطفی درست است.

ب) ترکیب فصلی

اگر دو گزاره با کلمه « یا » کنار هم قرار گیرند گزاره ای حاصل می شوند که آن را ترکیب فصلی آن دو گزاره می نامند. ترکیب فصلی را با علامت $p \vee q$ نشان می دهند و نماد « \vee » را فاصل می نامند. ارزش $p \vee q$ فقط هنگامی نادرست است که هر دو گزاره نادرست باشند.

مثلا: « ۴ عدد اول است یا ۲۰ بر ۴ بخش پذیر می باشد. » یک ترکیب فصلی است و ارزش آن درست می باشد زیرا یکی از دو گزاره آن درست است. چنانکه ملاحظه می شود اگر هر دو گزاره هم درست باشند ترکیب فصلی درست است و این با معنای محاوره ای « یا » تفاوت دارد که باید به آن توجه کرد.

دو گزاره هم ارز

دو گزاره p و q که ارزش یکسانی داشته باشند « هم ارز » یکدیگر می نامند و با $p \equiv q$ نشان می دهند.

ج) نقیض گزاره

برای هر گزاره p می توان گزاره ای در نظر گرفت که ارزش آن مخالف ارزش p باشد.

این گزاره را با $\sim p$ نشان داده و آن را « نقیض » p میخوانند. مثلا داریم:

$\sim (4 \text{ عدد اول است}) \equiv (4 \text{ عدد اول نیست})$

$\sim (4 < 2) \equiv (4 \geq 2)$

گزاره شرطی

بسیاری از احکام ریاضی به صورت « اگر ... آنگاه ... » بیان شده اند. مثل:

۱. اگر چهارضلعی مستطیل باشد آنگاه دو قطرش با هم برابرند.

۲. اگر دو عدد حقیقی با هم برابر باشند آنگاه مکعبات آنها نیز با هم برابرند

۳. اگر a عدد طبیعی و مربع کامل باشد آنگاه رقم یکان آن عدد عضو مجموعه $\{2, 3, 7, 8\}$ نیست.

هر یک از گزاره های فوق را یک « گزاره شرطی » می نامند و با نماد $p \Rightarrow q$ نشان می دهند که خوانده می شود: « اگر p آنگاه q »

در هر گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ ، p را « مقدم » و q را « تالی » می نامند.

چنانکه از مفهوم یک گزاره شرطی می توان فهمید گزاره شرطی فقط در صورتی نادرست است که مقدم آن درست و تالی نادرست باشد.

مثال: ارزش هر یک از گزاره های زیر را تعیین کنید:

(الف) $25 > 16 \Rightarrow -5 > 4$

(ب) $(100 \text{ بر } 4 \text{ بخش پذیر است}) \Rightarrow (10 \text{ بر } 2 \text{ بخش پذیر است})$

(ج) $(5 \text{ عدد اول است}) \Rightarrow (25 \text{ عدد اول است})$

(د) $(\text{مثلث } ABC \text{ قائم الزاویه است}) \Rightarrow (\text{مثلث } ABC \text{ متساوی الاضلاع است})$

با توجه به ارزش گزاره های شرطی می توان گفت که از موارد فوق فقط (الف) و (د) نادرست می باشند و بقیه درست هستند.

تذکر: با توجه به مطالب قبلی می توانیم ارزش هر یک از ترکیبهای گزاره ها را در جدولی به صورت زیر خلاصه کنیم:

p	Q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	ن	د

ضمناً اگر بخواهیم برای نقیض یک گزاره جدولی تشکیل دهیم دو ردیف برای آن کافی است.

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

چنانکه ملاحظه شد جدول ارزش یک گزاره تنها دارای دو سطر و جدول ارزش ترکیب دو گزاره متفاوت دارای چهار سطر و

جدول ارزش ترکیب n گزاره متفاوت دارای 2^n سطر خواهد بود.

شرطهای لازم و کافی

اگر $p \Rightarrow q$ گزاره درست باشد در این صورت p را شرط کافی برای q و q را شرط لازم برای p می نامند. در این حالت $p \Rightarrow q$ را یک « قضیه ریاضی » می نامند که p « فرض » و q « حکم » آن می باشد.

مثلا: مستطیل بودن ۴ ضلعی شرط کافی برای برابری دو قطر است و برابری دو قطر شرط لازم برای مستطیل بودن چهارضلعی است. همچنین اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، $a=b$ شرط کافی است برای $a^2=b^2$ و $a^2=b^2$ شرط لازم برای $a=b$ است. در هندسه به قضیه زیر توجه کرده اید:

شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه ای از یک صفحه از دو سر پاره خط واقع در همان صفحه به یک فاصله باشد آن است که نقطه روی عمود منصف آن پاره خط واقع باشد.
گزاره فوق در بیان دو قضیه زیر است:

(الف)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{فرض: نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است.} \\ \text{حکم: نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد. (لزوم شرط)} \end{array} \right.$
(ب)	$\left\{ \begin{array}{l} \text{فرض: نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.} \\ \text{حکم: نقطه از دو سر پاره خط به یک فاصله است. (کفایت شرط)} \end{array} \right.$

یکی دیگر از ترکیبهای گزاره ها ترکیب دو شرطی است که بصورت زیر تعریف می شود:

تعریف

ترکیب عطفی دو گزاره $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را به صورت $p \Leftrightarrow q$ و آن را گزاره دو شرطی می نامیم و به این صورت می خوانیم :
« اگر p آنگاه q و بالعکس » یا « p اگر و فقط اگر q »

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \quad \text{پس داریم:}$$

اگر جدول ارزش عبارت طرف دوم را تشکیل دهیم خواهیم که گزاره $p \Leftrightarrow q$ در حالتی که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند درست است و در دو حالت دیگر نادرست می باشد.

واضح است که اگر $p \Leftrightarrow q$ درست باشد هر یک از دو گزاره p و q شرط لازم و کافی برای دیگری است.

معرفی چند اصطلاح

(الف) $q \Rightarrow p$ را عکس گزاره ی شرطی $p \Rightarrow q$ می نامند. ارزش عکس یک گزاره شرطی با ارزش خود آن گزاره ممکن است یکسان باشد یا نباشد.

(ب) $\sim p \Rightarrow \sim q$ را عکس نقیض گزاره $p \Rightarrow q$ می نامند. ارزش این گزاره همواره با ارزش $p \Rightarrow q$ یکسان است. در اثبات بعضی از قضایا از این هم ارزی استفاده می کنند و بجای اثبات قضیه $p \Rightarrow q$ عکس نقیض آن را ثابت می کنند. مثلا اگر بخواهیم در مجموعه اعداد طبیعی قضیه:

« اگر a^2 زوج باشد آنگاه a زوج است. » را ثابت کنیم می توانیم قضیه زیر را که اثبات آن ظاهراً ساده تر است ثابت کنیم:
 « اگر a فرد باشد آنگاه a^2 فرد است. »

قضایای دموورگان

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (\text{الف})$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad (\text{ب})$$

درستی هم ارزی های فوق را می توانیم به کمک جدول ثابت کنیم.

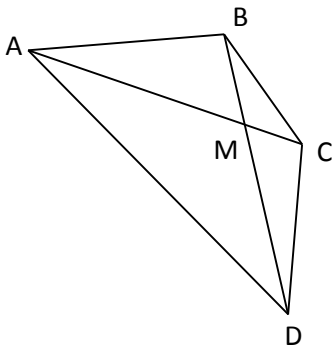
نقیض گزاره شرطی

با استفاده از جدول می توان ثابت کرد که هم ارزی های زیر برقرار است.

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

با توجه به هم ارزی فوق برای اثبات نادرستی گزاره شرطی باید حالتی را معرفی کنیم که در آن حالت مقدم درست و تالی نادرست باشد.

مثلاً: اگر بخواهیم نادرستی گزاره: « اگر دو قطر ۴ ضلعی برابر باشند آنگاه ۴ ضلعی مستطیل است. » را نشان دهیم باید یک چهارضلعی معرفی کنیم که دو قطرش برابر باشند اما مستطیل نباشد. شکل رو به رو چنین ۴ ضلعی را نشان می دهد: (برای رسم این چهار ضلعی، دو پاره خط مساوی و متقاطع AC و BD را طوری رسم کرده ایم که $MD \neq MA$ باشد.)



معرفی سورها

در بعضی از گزاره ها از نمادهای \forall و \exists و ∇ استفاده می کنیم. این نمادها را به ترتیب سور عمومی، سور وجودی و سور صفر می نامند و گزاره ای را که در آن از این نمادها استفاده شده است « گزاره سوری » می نامند. هر یک از نمادها به شرح زیر است:

الف) سور عمومی \forall

به گزاره های زیر توجه کنید:

۱. همه اعداد طبیعی بر ۱ بخش پذیرند.
۲. مربع هر عدد طبیعی، یک عدد طبیعی است.
۳. همه اعداد اول، فرد می باشند.

در هر یک از گزاره های فوق، خاصیتی به تمام عضوهای یک مجموعه نسبت داده شده است و برای اینکه این گزاره ها درست باشند باید آن خاصیت برای همه عضو های آن مجموعه، برقرار باشد. وجود حداقل یک عضو از مجموعه که آن خاصیت را نداشته باشد باعث نادرستی گزاره خواهد شد و در این حالت، هر یک از عضو های مزبور را یک مثال نقش برای آن گزاره می نامند. سه مثال فوق را می توانیم به شکل زیر بنویسیم. (نماد \forall را می خوانند: « برای هر » یا « برای همه ».)

$$1) \forall X \in N \quad (\text{X بر ۱ بخش پذیر است})$$

$$۲) \forall X \in N, (X^2 \in N)$$

$$۳) \forall X \in P, (X \text{ عدد فرد است})$$

در اینجا N مجموعه اعداد طبیعی و P مجموعه اعداد اول است. چنانکه ملاحظه می شود گزاره های (۱) و (۲) درست می باشند زیرا خاصیت مربوطه برای همه اعضای مجموعه درست است. اما گزاره ی (۳) درست نیست و مثال نقض آن $X = ۲$ می باشد.

ب) سور وجودی

به گزاره های زیر توجه کنید:

۱. بعضی از اعداد طبیعی فرد هستند.

۲. عددی طبیعی وجود دارد که مساوی مربع خودش باشد.

۳. عدد اولی وجود دارد که بر ۱۳ بخش پذیر است.

۴. عددی طبیعی و دو رقمی وجود دارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر است.

در هر یک از گزاره های فوق خاصیتی به بعضی از عضوهای یک مجموعه نسبت داده شده است برای آنکه این گونه گزاره ها درست باشند باید خاصیت مورد نظر حداقل برای یک عضو آن مجموعه درست باشد. از مثالهای فوق سه مثال اول گزاره های درست و مثل چهارم گزاره نادرست می باشد.

(نماد \exists را می خوانند: « وجود دارد » یا « برای بعضی »)

چهار مثال فوق را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$۱) \exists X \in N, (X \text{ فرد است})$$

$$۲) \exists X \in N, (X = X^2)$$

$$۳) \exists X \in P, (X \text{ بر } ۱۳ \text{ بخش پذیر است})$$

$$۴) \exists X \in N, (X \text{ دو رقمی است و بر } ۱۰۱ \text{ بخش پذیر است})$$

تذکر: واضح است که اگر گزاره ای با سور عمومی درست باشد، با سور وجودی نیز درست است. مثلاً اگر بگوییم بعضی اعداد طبیعی مثبت هستند گزاره درستی را بیان کرده ایم.

ج) سور صفر \nexists

به گزاره های زیر توجه کنید:

۱. عدد طبیعی دو رقمی وجود ندارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد.

۲. عدد اولی وجود ندارد که بر ۲۶ بخش پذیر باشد.

۳. عدد زوجی وجود ندارد که اول باشد.

در هر یک از گزاره های فوق نداشتن خاصیتی به همه عضو های یک مجموعه نسبت داده شده است یا به عبارت دیگر خاصیتی از همه اعضا سلب شده است. شرط درستی گزاره آن است که این خاصیت برای هیچیک از عضوهای مجموعه برقرار نباشد. از مثال های فوق دو مثال ۱ و ۲ درست است و مثال ۳ نادرست است.

(نماد \exists را میخوانند : «وجود ندارد».)

سه مثال بالا را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

۱) $\exists X \in N$ (X دو رقمی است و بر ۱۰۱ بخش پذیر است)،

۲) $\exists X \in P$ (X بر ۲۶ بخش پذیر است)،

۳) $\exists X \in E$ (X اول است)،

(در این اینجا E به معنی مجموعه اعداد زوج است.)

تذکر : با توجه به مطالب فوق برای اثبات درستی گزاره ای که با سور عمومی بیان شده است باید نشان دهیم خاصیت مورد نظر برای همه عضوهای مجموعه (بدون استثنا) برقرار است. اما برای رد چنین گزاره ای آوردن فقط یک مثال نقش کافی است.

نقیض گزاره های سوری

با توجه به معنی سورها که شرح داده شد می توان نقیض گزاره های سوری را در حالت های مختلف مطرح کرد:

مثال ۱) نقیض گزاره « همه انسان ها فنا پذیرند » را می توان به صورت « انسانی وجود ندارد که فناپذیر نیست » نوشت.

مثال ۲) نقیض گزاره « بعضی از مثلثهای قائم الزاویه، متساوی الساقین هستند » را می توانیم به صورت « وجود ندارد مثلث قائم الزاویه ای که متساوی الساقین باشد » بنویسیم.

مثال ۳) نقیض گزاره « عددی طبیعی و دو رقمی وجود ندارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد » را می توانیم بنویسیم بصورت « عدد طبیعی و دو رقمی وجود دارد که بر ۱۰۱ بخش پذیر باشد ».

به طور کلی می توانیم از قاعده های زیر برای نوشتن نقیض گزاره های سوری استفاده کنیم:

$$\sim (\forall X \in A, p(X)) \equiv \exists X \in A, \sim p(X)$$

یعنی برای نوشتن نقیض گزاره هایی که با سور عمومی نوشته شده اند (گزاره کلی) سور عمومی را به سور وجودی تبدیل کرده و نقیض خاصیت مطرح شده را می نویسیم.

$$\sim (\exists X \in A, p(X)) \equiv \forall X \in A, \sim p(X)$$

$$\equiv \exists X \in A, p(X)$$

یعنی برای نوشتن نقیض گزاره هایی که با سور وجودی بیان شده اند سور وجودی را به صورت عمومی تبدیل کرده و نقیض خاصیت مطرح شده را می نویسیم یا سور وجودی را به سور صفر تبدیل کرده و خاصیت مطرح شده را می نویسیم.

مثال: ارزش هر یک از گزاره های سوری زیر را تعیین کرده و نقیض آنها را بنویسید.

الف) $\forall X \in Z, X^2 > 0$

ب) $\exists X \in Z, X^2 - 8 = 0$

ج) $\forall a \in N, (a = 5) \vee (a^2 = 36)$

د) $\forall X \in Z, (X > 2 \Rightarrow X^2 > 4)$

هـ) $\forall X \in Z, (X > 5) \wedge (X^2 < 10)$

حل:

مثال الف: نادرست است زیرا $X = 0$ مثال نقض آن است و نقیض آن به صورت زیر می باشد:

$$\exists X \in Z, X^2 \leq 0$$

مثال ب: درست است زیرا $X = 2$ در Z وجود دارد و نقیض آن به دو صورت زیر می باشد:

$$\forall X \in Z, X^2 - 1 \neq 0$$

$$\nexists X \in N, X^2 - 1 = 0$$

مثال ج: نادرست است زیرا برای هر عدد طبیعی جز ۵ و ۶ مثال نقض آن است و نقیض آن به صورت زیر است:

$$\exists a \in N, a \neq 5 \wedge a^2 \neq 36$$

مثال د: درست است زیرا برای هر عدد صحیح X اگر X بزرگتر از ۲ باشد آنگاه X^2 بزرگتر از ۴ است و نقیض آن به صورت زیر است:

$$\exists X \in Z, (X > 2 \mid \wedge (X^2 \leq 4))$$

مثال ه: درست است زیرا عددی طبیعی که بزرگتر از ۵ باشد و مربع آن کوچکتر از ۱۰ باشد وجود ندارد و نقیض آن به صورت زیر است:

$$\exists X \in N, (X > 2) \wedge (X^2 < 4)$$

مثال های دیگر:

ارزش گزاره های سوری زیر را تعیین کنید:

الف) $\forall x \in R, x^2 > 0$

ب) $\exists x \in R, x^2 = x$

ج) $\exists x \in R, \frac{x-1}{2} = 0$

د) $\nexists x \in R, x^2 = -1$

ه) $\forall x \in Z, x = 0$

و) $\nexists x \in N, x + 1 = 0$

ز) $\forall x \in Z, x^2 > 0$

تمرین

۱- اگر p و r گزاره های درست باشند ارزش $p \wedge q \Rightarrow r$ را تعیین کنید.

۲- اگر p و r هر دو نادرست باشند ارزش $p \wedge q \Rightarrow r$ را تعیین کنید.

۴- اگر $p \Rightarrow q$ و $r \Rightarrow q$ درست باشند نشان دهید $p \Rightarrow r$ نیز درست است.

۵- اگر $p \wedge q$ درست باشد نشان دهید $p \vee q$ نیز درست است.

۶- اگر $p \Rightarrow q$ درست باشد ارزش $p \wedge \sim q$ را تعیین کنید.

۷- ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید و نقیض هر کدام را بنویسید.

الف) هر متوازی الاضلاعی مستطیل است.

ب) هر مربعی متوازی الاضلاع است

ج) هر مربعی لوزی است.

د) بعضی مستطیل ها مربعند.

ه) بعضی مثلثها متساوی الاضلاعند.

و) وجود ندارد مربعی که لوزی باشد.

ز) عدد اول زوج وجود ندارد.

۸- ارزش گزاره های زیر را تعیین کنید و نقیض هر کدام را بنویسید.

الف) $\forall x \in R, (x^2 - 4 = 0) \Rightarrow (x^3 - 8 = 0)$

ب) $\exists x \in R, x^2 + 4 \geq 8x$

ج) $\nexists x \in R, x^2 + 5x - 6 = 0$

د) $\forall x \in R, x^2 + 1 > 0$

ه) $\forall x \in N, \left(\frac{1}{4}\right)^x \in N$

و) $\forall x \in R, x + 5 > x - 1$

ز) $\exists x \in Q, x^2 = 7$

ح) $\exists x \in Z, \frac{1}{x} \in Z$

ط) $\nexists x \in N, \frac{1-x^2}{5} \in Z$

ی) $\nexists x \in Z, 10^x = x^{10}$

ک) $\nexists x \in R, (x = 5 \Rightarrow x^2 = 10)$

ل) $\nexists x \in N, 2^{-x} \in N$

م) $\forall x \in Z, \frac{x+1}{x} > 1$

۹- با انتخاب مجموعه و سور مناسب برای هر یک از موارد زیر، آنها را به گزاره ی درست تبدیل کنید:

الف) $\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{4}$

ب) $\sqrt{(x+1)^{18}} = 0$

ج) $(x-1)^{20} + (2x-6)^{40} = 0$

د) $\frac{x^2-1}{x^4-1} = 0$

ه) $2x \leq x^2 + 1$

و) $\frac{x^2-1}{x^4-1} > 0$

ز) $(x^2 < 0) \wedge (x+3 = 0)$

ح) $(x^2 = 1) \Rightarrow x = 1$

ط) $\sqrt{x^2} \in N \vee (2^x - 1 = 8)$

$$y) \frac{(x-1)(x^2+5)}{x^2+x-2} = 0$$

۱۰- عکس، عکس نقیض و نقیض گزاره های زیر را بنویسید.

الف) اگر عددی اول باشد آنگاه مربع آن نیز اول است.

ب) اگر $a = b$ آنگاه $a^2 = b^2$

ج) اگر $a > b$ آنگاه $a^3 > b^3$

د) اگر دو قطر چهارضلعی هم دیگر را نصف کنند آنگاه چهارضلعی متوازی الاضلاع است.

۱۱- جاهای خالی را با کلمات مناسب پر کنید:

الف) $p \vee q$ شرط ... است برای $p \wedge q$

ب) شرط ... برای $X^2 = Y^2$ آن است که $|X| = |Y|$

تمرین های تکمیلی گزاره نما و گزاره های سوری

۱- دامنه متغیر گزاره نماهای زیر را به دست آورید

الف) $\frac{1}{x} + \sqrt{x} = 1$

ب) $2x + 3 \leq 4 - 5x$

ج) $\frac{x+2}{x^2-4} \in N$

د) $x^2 - 9 = 0$

ه) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$

۲- مجموعه جواب گزاره نماهای زیر را پس از پیدا کردن دامنه متغیر بدست آورید.

الف) $\sqrt{x^2} = 1$

ب) $2x + 3 < 3x - 3$

ج) $\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x+1}$

۳- گزاره های زیر را با استفاده از نماد های سوری بنویسید و ارزش آنها را با ذکر دلیل تعیین کنید. کدام یک حکم کلی

است ؟

الف) ۲ به توان هیچ عدد صحیحی مساوی ۱ نیست

ب) مربع بعضی اعداد حقیقی کوچکتر از صفر است

ج) مربع هر عدد طبیعی بزرگتر از یک است

د) مربع هر عدد طبیعی فرد عددی فرد است

۴- اگر p خاصیت « اول بودن » و q نسبت « کوچکتر یا مساوی » باشد گزاره های زیر را به زبان فارسی بیان کنید

الف) $q(4 \text{ و } 5)$ ب) $p(2)$

۵- گزاره های سوری زیر را به زبان فارسی روان برگردانید.

الف) $\forall x \in R, \exists y \in R, x < y$

ب) $\exists x \in p, x = 2k + 1$

۶- ارزش گزاره های سوری زیر را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) $\forall x \in N, \frac{x}{x+1} < 1$

ب) $\nexists x \in Z, 2x < x$

ج) $\nexists x \in R, x^2 = x$

د) $\forall x \in R, x^3 + x = x(x^2 + 1)$

ه) $\forall x \in R, x^4 \neq -1$

و) $\nexists x \in Z, x^2 = 2^x$

ز) $\exists! x \in R, 5\frac{1}{x} = 1$

ح) $\forall x \in Q, x + \frac{1}{x} \geq 2$

ط) $\exists x \in R, \frac{x^2+1}{x^2-1} \geq 2$

ی) $\forall x \in R, x = x^2 + \frac{1}{x} \leq -2$

ک) $\exists! x \in R, x + a = 0$

ل) $\exists x \in R, x^2 < 0$

م) $\forall x \in R, 1 < x < 2$

ن) $\exists x \in R, (x < 5 \vee x > 5)$

س) $(\exists x \in R, x > 1) \vee (\forall x \in R, x^2 > 0)$

ع) $(\nexists x \in N, x < 1) \wedge (\exists x \in Z, \sqrt{-x} \in N)$

مجموعه

نمونه ای از سوالاتی که در بحث تکمیلی می توان برای دانش آموزان مطرح نمود عبارتند است:

(۱) با توجه به تعریف مجموعه که تکرار اعضا بی معنی است ، تعیین نمایید که اگر ما در یک کلاس ۳۳ عدد صندلی همانند و هم شکل داشته باشیم و بخواهیم مجموعه صندلی های کلاس را بنویسیم ، آیا این مجموعه تک عضوی است یا ۳۳ عضوی؟

(۲) با توجه به مبحث زیر مجموعه ، تعیین کنید آیا مجموعه ای وجود دارد که در حالی که عضو است ، زیر مجموعه خودش هم باشد؟

(۳) به روش عضو گیری هر یک از تساوی های زیر را اثبات نماید.

$$1) (A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$2) (A \cap B)' = A' \cup B'$$

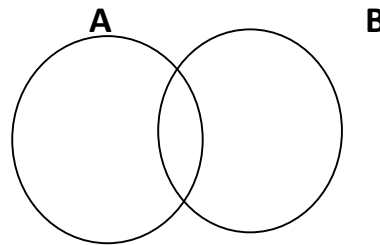
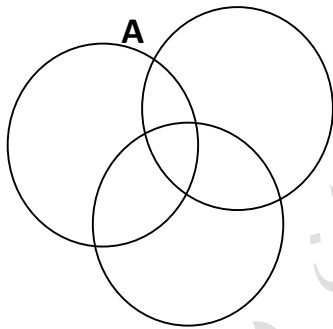
$$3) A - B = A \cap B'$$

(۴) به کمک عضو گیری نشان دهید اگر $A \subseteq B$ باشد ، آنگاه $B' \subseteq A'$.

(۵) شکل متناظر با هر مجموعه را هاشور بزنید.

(ب) $(A - B) \cup (B - A)$

(الف) $(A \cup B) \cap C$



(۶) برای هر دو مجموعه دلخواه تفاضل متقارن را با $A \Delta B$ نشان میدهم و داریم

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

(۷) مجموعه اعداد طبیعی با کدام مجموعه هم ارزند؟

(۲) مجموعه اعداد حقیقی کمتر از ده میلیون

(۱) مجموعه اعداد طبیعی کمتر از ده میلیون

۳) مجموعه اعداد حقیقی بزرگتر از ده میلیون

۴) مجموعه اعداد طبیعی بزرگتر از ده میلیون

۸) با یک نمایش ساده نشان دهید اعداد گویا شمارا هستند.

۹) برای هر دو مجموعه متناهی A و B ثابت کنید که :

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

۱۰) از بین ۷۵ دانش آموز دهم در مدرسه ای تعداد ۳۴ نفر در المپیاد ریاضی و ۳۰ نفر در المپیاد فیزیک و ۳۵ نفر در المپیاد زیست شرکت کرده اند ، همچنین میدانیم ۱۳ نفر در دو المپیاد ریاضی و فیزیک ، ۱۲ نفر در فیزیک و زیست همچنین ۱۵ نفر در ریاضی و زیست شرکت کرده اند ، اگر بدانیم ۱۱ نفر از دانش آموزان این مدرسه در هیچ المپیادی شرکت ننموده اند در هر یک از موارد تعداد دانش آموزان خواسته شده را تعیین کنید.

الف) تعداد دانش آموزانی که در هر سه المپیاد شرکت نموده اند.

ب) تعداد دانش آموزانی که فقط در المپیاد ریاضی شرکت نموده اند.

ج) تعداد دانش آموزانی که فقط در یک المپیاد شرکت نموده اند.

د) تعداد دانش آموزانی که حد اکثر در یک المپیاد شرکت نموده اند.

ه) تعداد دانش آموزانی که حداقل در دو المپیاد شرکت نموده اند.

۱۱) اگر داشته باشیم: $A_n = (-n, 2^n)$ طرف دوم تساویها را کامل کنید.

$$\text{الف) } \bigcup_{i=1}^{50} A_i =$$

$$\text{ب) } \bigcap_{i=1}^{50} A_i =$$

$$\text{ج) } (A_4 \cap A_6 \cap A_8) \cup A_5 =$$

$$\text{د) } A_{10} - A_8 =$$

۱۲) اگر $A_n = \{m \in \mathbb{Z} | m \geq -n, 2^m \leq n\}$ آن گاه مجموعه $A_4 \cap A_3$ چند زیر مجموعه دارد؟

۱۳) ثابت کنید اگر S یک مجموعه دلخواه و متناهی از مجموعه متناهی و مرجع U باشد، در این صورت:

$$n(S') = n(U) - n(S)$$

۱۴) در یک کنفرانس ۴۵ نفری ۳۰ نفر کلاه دارند و ۲۱ نفر عینک زده اند که از این بین ۸ نفر هم کلاه زده اند و هم عینک دارند. مطلوب است تعیین افرادی که :

الف) عینکی هستند ولی کلاه ندارند. ب) فقط یکی از کلاه یا عینک را دارند. ج) نه کلاه دارند و نه عینک

دنباله ها

- (۱) در یک دنباله حسابی اگر جمله هجدهم ۱۱۴ و جمله سی ام ۶۶ باشد، این دنباله چند جمله مثبت دارد؟
- (۲) در یک دنباله حسابی مجموع سه جمله اول آن $6\sqrt{2}$ و مجموع سه جمله آخر آن $60\sqrt{2}$ است. اگر جمله پانزدهم دنباله $\frac{3}{4}$ جمله دهم باشد. دنباله چند جمله دارد؟
- (۳) یک دنباله حسابی ۳۰ جمله دارد اگر مجموع جملات با شماره فرد ۶۴۵ و مجموع جملات با شماره زوج ۶۹۰ باشد. قدر نسبت دنباله را پیدا کنید. آیا جمله اول این دنباله را می توانید پیدا کنید؟
- (۴) مجموعه اعداد طبیعی کوچکتر مساوی ۱۰۰۰ را در نظر بگیرید. مطلوب است تعیین:
- الف) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۳
- ب) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۵
- ج) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۳ و ۵ (بخش پذیر بر ۱۵)
- د) تعداد اعضای بخش پذیر بر ۳ یا ۵
- ه) تعداد اعضای که بر ۳ بخش پذیر باشند ولی بر ۵ بخش پذیر نباشند. (فقط بخش پذیر بر ۳)
- و) تعداد اعضای که بر ۵ بخش پذیر باشند ولی بر ۳ بخش پذیر نباشند. (فقط بخش پذیر بر ۵)
- (۵) تعداد اعضای مجموعه $A = \{11, 12, 13, \dots, 99\}$ که بر ۴ یا ۱۰ بخش پذیر باشند را بیابید.
- (۶) در یک مثلث نشان دهید هر گاه سه ضلع مثلث تشکیل دنباله هندسی دهند، سه ارتفاع مثلث نیز تشکیل دنباله هندسی میدهند.
- (۷) مجموع سه جمله متوالی یک دنباله هندسی ۸۶ است. اگر این سه عدد به ترتیب جملات اول و دوم و هشتم دنباله حسابی باشند. آنها را بیابید.
- (۸) حد اقل چند جمله از دنباله $11, 9, 7, \dots$ را از ابتدا با هم جمع کنیم تا مجموع از ۴۰۰ بیشتر شود.
- (۹) تعداد جملات مشترک دو دنباله $a_n = 3n - 1$ و $b_n = 4n + 3$ در بازه $(0, 100)$ چند تاست؟

۱۰) در یک دنباله حسابی با هزار جمله ، جمله پنجاهم از جمله پنجم ۵ واحد کمتر است. اگر این دنباله فقط ۵۰ جمله مثبت داشته باشد ، حداکثر مقدار ممکن برای جمله اول را بیابید.

۱۱) مجموع n جمله دنباله حسابی به صورت $S_n = 3n^2 + n + a - 3$ باشد، مقدار a چقدر است؟

۱۲) عدد ۹۳ را به سه قسمت تقسیم کنید که اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی بدهند و اختلاف دو عدد بزرگتر ۶۰ باشد.

۱۳) جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت $a_n = (m^2 - 9)n^2 + \frac{m+n}{m^2+2m+2}$ است ، اگر قدر نسبت

دنباله $\frac{1}{5}$ باشد ، مقدار m کدام است؟

۱۴) مجموع نه جمله اول دنباله هندسی ۵۷ برابر مجموع سه جمله اول دنباله است. در صورتیکه قدر نسبت دنباله عددی صحیح باشد ، آن را بیابید.

۱۵) جمله دوم یک دنباله حسابی ۱۴ است، اگر به جمله سوم آن عدد ۲۵ اضافه شود سه جمله نخست آن یک دنباله هندسی افزایشی تشکیل می دهند که جمله سوم این دنباله را بدست آورید.

۱۶) جمله دوم یک دنباله هندسی افزایشی ۱۰ است اگر از جمله سوم آن ۹ واحد کم شود ، سه جمله به ترتیب سه جمله نخست یک دنباله حسابی می شوند ، جمله سوم دنباله هندسی کدام است؟

۱۷) دو جمله نخست دنباله حسابی و هندسی افزایشی با هم برابر است ، اگر جمله سوم دنباله هندسی ۱۲ واحد از جمله سوم دنباله حسابی بیشتر باشد، دنباله ها را مشخص کنید.

۱۸) سه جمله اول و هفتم و یازدهم یک دنباله حسابی سه جمله متوالی دنباله هندسی هستند. تعیین کنید چندمین جمله دنباله حسابی برابر صفر است؟

۱۹) در هر مورد حاصل را بدست آورید.

$$\text{الف) } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

$$\text{ب) } \frac{5}{4} - \frac{5}{16} + \frac{5}{32} =$$

۲۰) معادلات را حل کنید.

$$\text{الف) } 1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + \dots = \frac{1}{2} \quad |x| < \frac{1}{3}$$

$$\text{ب) } 4^x + 4^{x-1} + 4^{x-2} + \dots = \frac{64}{3}$$

۲۱) در یک دنباله هندسی نزولی جمله اول برابر ۳ و حد مجموع جملات دنباله $\frac{7}{4}$ است ، حد مجموع مربعات

جملات دنباله چقدر است؟

مثلثات

(۱) تعیین کنید $\frac{3}{8}$ دور کامل در جهت عقربه های ساعت چه زاویه ای را بر حسب درجه و رادیان مشخص می کند.

(۲) زاویه بین عقربه ساعت شمار و عقربه دقیقه شمار در ساعت ۲:۲۰ دقیقه چند درجه است؟

(۳) مساحت یک قطاع از دایره با زاویه مرکزی θ رادیان و شعاع R بدست آورید.

(۴) در یک تراکتور شعاع چرخ جلو ۵۰ cm و شعاع چرخ عقب ۸۰ cm است. اگر چرخ جلو زاویه $\frac{13\pi}{2}$ بچرخد.

میزان چرخش چرخ عقب بر حسب رادیان چه زاویه ای است؟

(۵) کامل کنید.

$$\sin 765^\circ =$$

$$\cos 930^\circ =$$

$$\tan 240^\circ =$$

$$\sin \frac{14\pi}{3} =$$

$$\cos \frac{19\pi}{6} =$$

$$\cot\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) =$$

(۶) فرض کنید $\sin \theta = \frac{3-2m}{4}$ باشد. اولاً حدود m را تعیین کنید. ثانیاً اگر داشته باشیم $-\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{2\pi}{3}$ حدود m را تعیین کنید.

(۷) اگر $\pi < \alpha < \beta < \frac{3\pi}{2}$ باشد علامت عبارت را تعیین کنید.

$$A = (\sin \alpha - \sin \beta)(\cos \alpha - \cos \beta)(\tan \alpha - \tan \beta)$$

(۸) اگر $\tan \theta = -3$ باشد مقدار کسر زیر را بدست آورید.

$$\frac{\sin \theta - 3 \cos \theta}{5 \sin \theta + 2 \cos \theta} =$$

(۹) اگر داشته باشیم $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ و زاویه α در ناحیه اول باشد مقادیر عددی هر مورد خواسته شده در زیر را بنویسید.

الف) $\cos(3\pi + \alpha)$

ب) $\cos\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) =$

ج) $\tan(\alpha - 3\pi) =$

۱۰) هر گاه $\frac{4\pi}{3} \leq \alpha < \frac{5\pi}{2}$ باشد و $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{3m-5}{2}$ حدود m را تعیین کنید.
 ۱۱) مقدار عددی هر یک را بنویسید.

الف) $\sin(585^\circ) =$

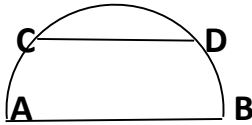
ب) $\cos(1110^\circ) =$

۱۲) اگر $\begin{cases} x = 3 + 2 \cos \alpha \\ y = 1 - 2 \sin \alpha \end{cases}$ باشد. یک رابطه مستقل از زاویه بین x و y پیدا کنید.

۱۳) اگر $\tan 10^\circ = a - 1$ باشد، حاصل کسر زیر را بدست آورید.

$$\frac{\cos 170^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 100^\circ}$$

۱۴) در نیم دایره ای به قطر AB مماس در نقطه B را رسم میکنیم و از نقطه A قاطعی می کشیم تا نیم دایره را در C و مماس مزبور را در D قطع کند. اگر α زاویه بین قاطع و قطر AB بوده و $AD=4AC$ اندازه α چقدر است؟



۱۵) نیم دایره به قطر $AB = 5$ داریم، اگر وتر $CD = 3$ و موازی AB باشد، $\tan(ACD)$ را بدست آورید.

۱۶) در هر قسمت بیشترین و کمترین مقدار عبارت را بدست آورید.

الف) $A = 3\sin^2 x + 1$

ب) $B = \cos^2 x - \sin x + 1$

ج) $C = \frac{2}{\sin x + 3}$

د) $D = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x + 2}$

۱۷) ساده کنید .

$$\frac{\sin \frac{49\pi}{10} - \sin \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{18\pi}{5} + 3\cos \frac{3\pi}{5}}{\cos(-\frac{3\pi}{5}) + 2\cos \frac{13\pi}{5} - \sin \frac{19\pi}{10}} =$$

۱۸) ثابت کنید.

الف) $(\tan \alpha + \cot \alpha - \sqrt{2}) \left(\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} + \sqrt{2} \right) = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$

ب) $\frac{\tan \alpha}{1 - \cot \alpha} + \frac{\cot \alpha}{1 - \tan \alpha} = 1 + \sec \alpha \csc \alpha$

ج) $(\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \sqrt{5})(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \sqrt{5}) = -4(1 + \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha)$

د) $\frac{\sin^4 x \cdot \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} + \frac{\cos^4 x \cdot \cot^2 x}{1 + \cot^2 x} = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x$

۱۹) در هر مثلث دلخواه ABC ثابت کنید .

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos c$$

۲۰) در یک متوازی الاضلاع که طول اضلاع آن ۶ و ۱۰ می باشند و اندازه زاویه بین آنها ۶۰ درجه می باشد.

الف) مساحت متوازی الاضلاع را بدست آورید.

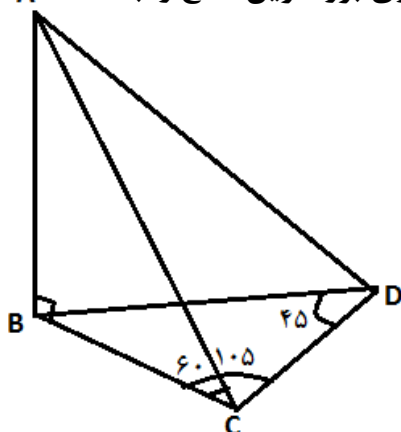
ب) طول قطر بزرگ متوازی الاضلاع را حساب کنید

۲۱) در یک مثلث ABC داریم: زاویه A برابر ۶۰ درجه و $b=4$ و $c=8$ سینوس دو زاویه دیگر مثلث را بدست

آورید.

۲۲) مثلثی به طول اضلاع ۲ و ۳ و ۴ اندازه تصویر قائم کوچکترین ضلع بر روی بزرگترین ضلع را بدست

آورید.



۲۳) در شکل مقابل مساحت مثلث ABC را بدست آورید.

$$DC = 2\sqrt{3}$$

۲۴) در یک هشت ضلعی به ضلع ۲ طول کوچکترین قطر چند است؟

۲۵) در یک مثلث داریم: $a^2 = 2bc(1 - \cos A)$ ثابت کنید مثلث متساوی الساقین است.

۲۶) در یک مثلث غیر متساوی الساقین داریم: $c(c^2 - b^2) = a(a^2 - b^2)$ اندازه زاویه B را بدست

آورید.

توان های گویا و عبارات جبری

۱) در هر مورد حاصل را به ساده ترین صورت ممکن بنویسید.

الف)
$$\sqrt[3]{\frac{-8}{27} + \sqrt[3]{\frac{-8}{27} + \sqrt[3]{\frac{1}{27}}}}$$

ب)
$$\sqrt{6 + 2\sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}$$

ج)
$$\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + \dots}}}$$

د)
$$\sqrt[3]{\sqrt{3} - 2} \times \sqrt[6]{7 + 4\sqrt{3}}$$

ه)
$$\left(\frac{4^{0/75}}{1 + 2^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}}}\right) + 9^{0/25} \left(2^{0/5} - 1\right) =$$

۲) هر مورد را به ساده ترین صورت بنویسید. (در صورت لزوم گویا کنید).

$$\text{الف)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} =$$

$$\text{ب)} \frac{1}{\sqrt[5]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}} =$$

$$\text{ج)} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}-\sqrt{2}} =$$

$$\text{چ)} \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt[3]{3}}} =$$

$$\text{خ)} \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1} =$$

۳) مقایسه کنید. $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ و $\sqrt{3}-2$

۴) دو عدد $\sqrt{11}-\sqrt{10}$ و $\sqrt{6}-\sqrt{5}$ را با هم مقایسه کنید.

۵) ب.م.م و ک.م.م چند جمله ایهای زیر را بدست آورید.

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x-5) - 120 \quad \text{و} \quad x^3 + (7-x)^3 - 343$$

۶) تجزیه کنید.

$$\text{الف)} a^8 - 5a^4 + 4 =$$

$$\text{ب)} x^3 + 3x^2 + 5x + 6 =$$

$$\text{ج)} x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 =$$

$$\text{د)} (a^2 - b^2)^3 - (c^2 - b^2)^3 + (c^2 - a^2)^3 =$$

$$\text{ه)} 8x^3 - y^3 - 1 - 6xy =$$

۷) تعیین کنید عبارت $\frac{x^2+7x}{x^3-7x+6}$ در چه مقادیری تعریف شده است.

۸) حاصل هر قسمت را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\text{الف)} \frac{3x^3 - 12x^2 - 15x}{x^3 + 6x^2} \times \frac{x^3 - 36x}{3x - 15} \div (x - 1) =$$

$$\text{ب)} \frac{x^3 - 9x^2 + 11x + 21}{x^3 - 3x^2 - x + 3} =$$

$$\text{ج)} \frac{2x^3 - x^2}{x^4 + x^3} - \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - x} + \frac{x - 1}{x^2 - 1} =$$

$$\text{د)} \frac{\frac{1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}}{\left(\frac{1+x}{1-x} - 1\right) \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)} =$$

۹) مقادیر m و n را طوری بیابید که عبارت $nx^3 - 4x^2 - mx + 10$ بر $x^2 - x - 2$ بخش پذیر باشد.

۱۰) اگر $\frac{x}{x^2+x+1} = \frac{1}{5}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بدست آورید.

$$\text{الف)} x^2 - \frac{1}{x^2} =$$

$$\text{ب)} x^3 + \frac{1}{x^3} =$$

۱۱) معادله مقابل را حل کنید. $(3x-6)^3 + (2x-6)^3 = (5x-12)^3$

۱۲) اگر $a = \sqrt{7} - 3$ و $b = \sqrt{7} + 3$ و $c = -2\sqrt{7}$ باشد، حاصل $a^3 + b^3 + c^3$ را بدست آورید.

۱۳) تساوی مقابل یک اتحاد است، مقادیر A و B و C را حساب کنید.

$$\frac{3x^2+3x+3}{x^3-3x+2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$$

معادله ها و نامعادله ها

۱) معادله های زیر را حل کنید.

الف) $x(x-3)(2x-3)^2 = 20$

ب) $(3x-1)^2(3x^2-2x-1) = 15$

ج) $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 =$

د) $(x+3)^2(x+2)(x+4) = 12$

ه) $7\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) = 9$

و) $x^2 - 4x + \frac{10}{x^2 - 4x + 5} = 2$

۲) مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله ی درجه ۲، $mx^2 - (2m+1)x + (m-1) = 0$ ، ریشه نداشته باشد.

ب) دو ریشه ی مساوی هم داشته باشد.

ج) یکی از ریشه ها برابر ۲ باشد، بعد از محاسبه m مقدار ریشه ی دیگر را نیز حساب کنید.

۳) معادله درجه دومی بنویسید که مجموع ریشه هایش ۲ و حاصلضرب ریشه هایش ۲- باشد.

۴) بدون حل معادله درباره ریشه ها و علامت آنها در معادله $3x^2 - 5x - 1 = 0$ بحث کنید.

۵) اگر α و β ریشه های معادله $2x^2 - 4x - 9 = 0$ باشند. مجموع مربعات و مجموع مکعبات دو ریشه را بدست آورید.

۶) اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشد، m را طوری بیابید که $\alpha\beta^2 + 4 = 0$ باشد.

۷) اگر بین ریشه های معادله $(m-1)x^2 - 2mx - (3m-1) = 0$ رابطه $2\alpha + 3\beta = 5$ برقرار باشد، مقدار m بدست آورید.

۸) معادله ی درجه دومی بنویسید که هر یک از ریشه هایش از دوبرابر ریشه های معادله ی $\delta x^2 + 3x - 5 = 0$ مقدار ۳ واحد کمتر باشد.

۹) سن پدر بزرگ از ۵۰ بیشتر و از ۷۰ کمتر است. هر کدام از پسرهایش به تعداد برادرهایشان، پسر دارند و کلاً دختری در کار نیست. جمع تعداد پسرهای پدر بزرگ و تعداد نوه هایش برابر سن اوست. پدر بزرگ چند ساله است؟

۱۰) معادله سهمی را بنویسید که راس آن نقطه $(-1, 3)$ و عرض از مبدا آن -2 باشد.

۱۱) معادله سهمی که از سه نقطه $(0, 3)$ و $(2, 7)$ و $(-1, 4)$ بگذرد. راس و خط تقارن سهمی را تعیین کنید. آیا سهمی ماکزیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

۱۲) معادله یک سهمی را بنویسید که دارای ماکزیمم مقدار ۸ باشد و محور عرض ها را به عرض ۶ و محور طولها را در -1 قطع کند.

۱۳) به ازای چه مقدار m خط $y = mx - 9$ بر سهمی $y = x^2$ مماس می شود؟
 ۱۴) تعیین علامت کنید.

$$P(x) = \frac{(x^3+1)(-x^2+5x-6)^5}{(x^2+5x+4)(x^2-16)^3}$$

۱۵) در هر مورد نامعادله داده شده را حل نموده و مجموعه جواب را به صورت بازه اعداد حقیقی نشان دهید و آنرا روی محور اعداد رسم کنید.

$$\text{الف) } \begin{cases} \frac{13x-16}{15} + \frac{x-32}{35} < \frac{x-6}{21} \\ (2x-1)^2 < 4(x^2-1) + 6 \end{cases} \quad \text{ب) } -1 < \frac{3x^2-4x}{x+1} < 0$$

۱۶) حدود m را چنان پیدا کنید که معادله مقابل دارای دو ریشه منفی باشد. $(m-1)x^2 - 2mx + (m-3) = 0$

۱۷) مقدار a را چنان تعیین کنید که نمودار سهمی $y = (a-2)x^2 + 2(2a-3)x + (5a-6)$ همواره بالای محور x ها قرار گیرد.

۱۸) معادلات قدر مطلق زیر را حل نمایید.

$$\text{الف) } |2x-5| + 7 = 13 \quad \text{ب) } |x-1| + |x-3| = 7$$

$$\text{ج) } x^2 - |x| - 6 = 0 \quad \text{د) } |x^2 - x - 3| = -x - 1$$

۱۹) مقدار k را چنان تعیین کنید که معادله زیر بی شمار جواب داشته باشد.

$$|x+1| + |2-x| = \frac{2k-1}{3k+1}$$

۲۰) نامعادلات قدر مطلق زیر را حل نمایید.

$$\text{الف) } |x^2 - 2x + 3| < x + 1 \quad \text{ب) } |x-3| + |x-5| \geq x$$

(۲) حدود m را چنان تعیین کنید که نامعادلات زیر به ازای تمام مقادیر x برقرار باشد.

الف) $|2 - x| - |3 - x| > 2 - m$

ب) $2|3x + 1| - 3|2x - 1| \leq 12 - 2m$

ریاضیات تکمیلی
سمپاد خراسان رضوی